

Συναρτήσεις

Η παραβολή

Μέγιστη τιμή

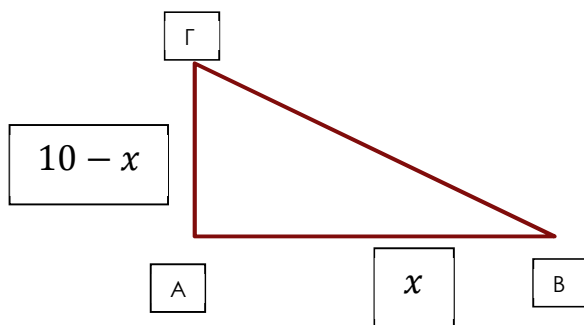
Το άθροισμα των καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι 10 cm.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν y του ορθογωνίου τριγώνου ως συνάρτηση της πλευράς του $AB = x$ είναι $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5x$ με $0 < x < 10$.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης .

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, όταν το ορθογώνιο τρίγωνο είναι και ισοσκελές .

Λύση

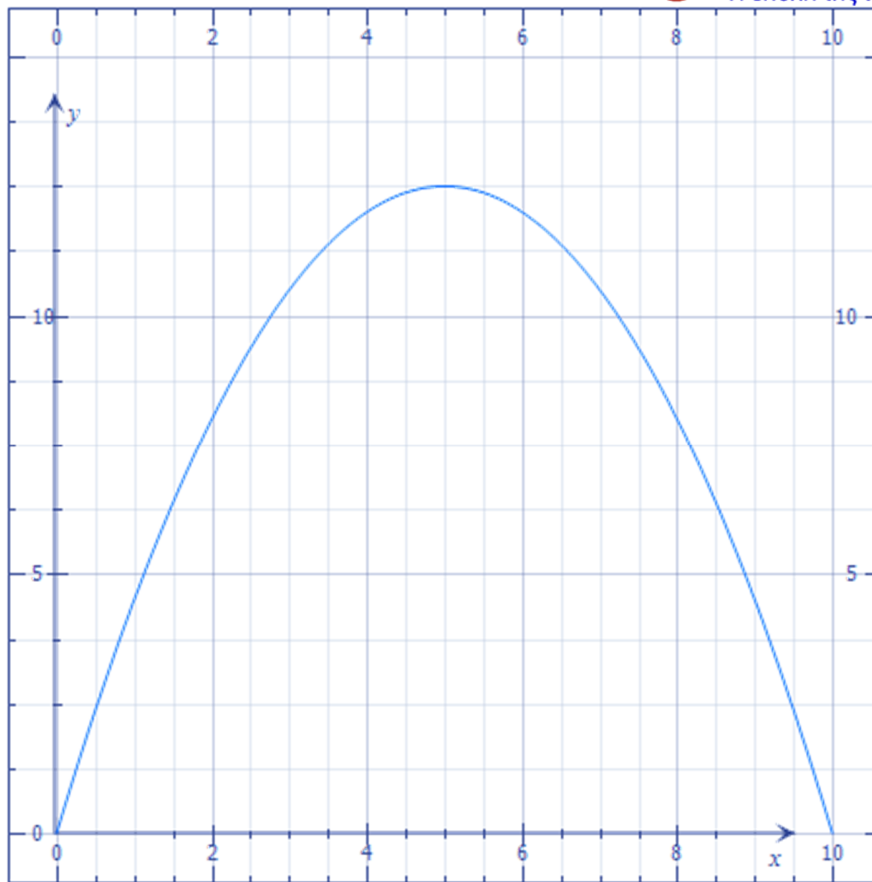


Αν η κάθετη πλευρά AB έχει μήκος x και το άθροισμα των δύο καθέτων πλευρών είναι 10 cm η κάθετη πλευρά AG έχει μήκος $10 - x$ cm.

Θεωρώντας την μία κάθετη πλευρά ως βάση και την άλλη κάθετη ως ύψος το εμβαδόν (το ημιγινόμενο των καθέτων πλευρών) δίνεται από την σχέση:

$$y = \frac{1}{2}x(10 - x)$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 5x$$



Η συνάρτηση $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5x$ είναι της μορφής $y = ax^2 + bx + c$ με:

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$b = 5$$

$$c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25$$

Η τιμή της μεταβλητής x για την οποία η παραπάνω παραβολή έχει την μέγιστη τιμή είναι:

$$x = -\frac{b}{2a} = 5$$

Και η μέγιστη τιμή είναι:

$$y_{max} = -\frac{\Delta}{4\alpha} = 12,5$$

Όταν όμως $AB = x = 5$ cm τότε και $AG = 10 - 5 = 5$ cm οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ισοσκελές και έχει εμβαδόν $12,5$ cm².

Γενικότερα: Στα προβλήματα που περιγράφονται με δευτεροβάθμιες συναρτήσεις μπορούν να υπάρξουν ερωτήσεις για μέγιστες ή ελάχιστες τιμές. Αυτές αντιστοιχούν στην **κορυφή της παραβολής** $(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha})$.