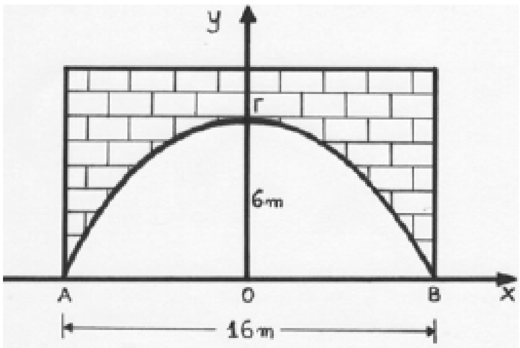
Συναρτήσεις

Η παραβολή

Πρόβλημα



Στο σχήμα φαίνεται η κάθετη τομή μιας σήραγγας που κατασκευάστηκε σε σχήμα παραβολής με μέγιστο πλάτος ΑΒ = 16 m και μέγιστο ύψος ΟΓ = 6 m.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής στο σύστημα αξόνων του σχήματος είναι $y = -\frac{3}{32}x^2 + 6$ με $-8 \le x \le 8.$

β) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος ενός φορτηγού που μπορεί να διασχίσει τη σήραγγα, όταν το πλάτος του φορτηγού είναι 3,2 m και ο δρόμος είναι μιας κατεύθυνσης.

Λύση

Η συνάρτηση είναι συνάρτηση δευτέρου βαθμού της μορφής $y = ax^2 + \beta x + \gamma$.

Οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β είναι:

$$A(-8,0)$$

$$B(8,0)$$

$$-8 \le x \le 8.$$

Ο άξονας συμμετρίας είναι η ο άξονας y'y, x=0

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

$$0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

$$\beta = 0$$

$$y = ax^2 + \beta$$

Η κορυφή της είναι το σημείο Κ (0,6)

$$\Gamma\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)\rightarrow\Gamma(0,6)$$

$$\Gamma\left(0,-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)\rightarrow\Gamma(0,6)$$

Έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=-4\alpha\gamma$$

Για την κορυφή λοιπόν

$$\Gamma\left(0,-\frac{-4\alpha\gamma}{4\alpha}\right)\rightarrow\Gamma(0,6)$$

$$\Gamma(0,\gamma)\rightarrow K(0,6)$$

$$\gamma=6$$

$$y=ax^2+6$$

Τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο Β (8,0) :

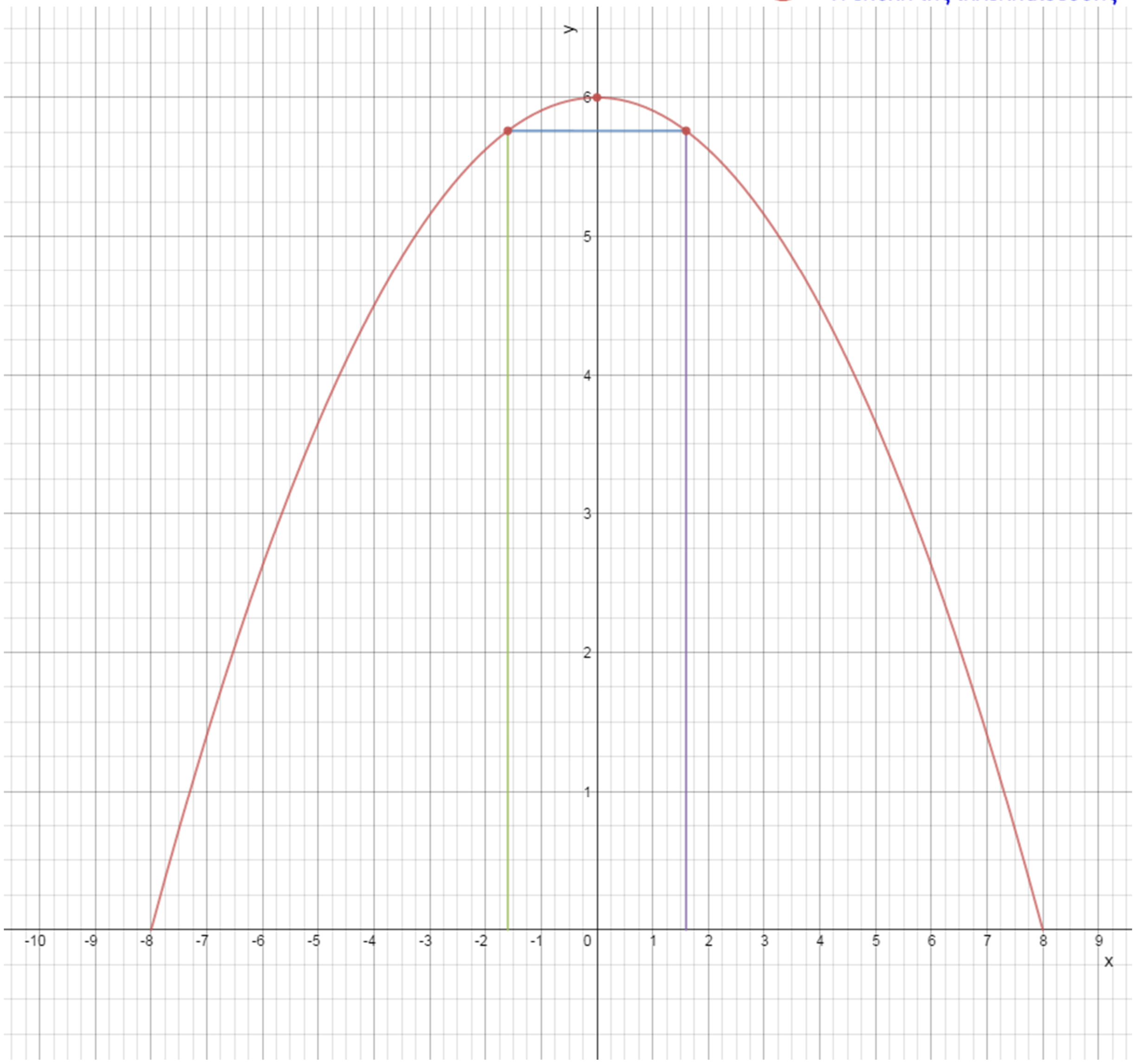
$$0=a\cdot 8^2+6$$

$$64\alpha=-6$$

$$\alpha=-\frac{6}{64}$$

$$\alpha=-\frac{3}{32}$$

$$y=-\frac{3}{32}x^2+6$$



Το μέγιστο ύψος του φορτηγού θα προκύψει από το πλάτος του (3,2 m) δηλαδή για:

$$x = \frac{3{,}2}{2} = 1{,}6\ m$$

Τότε

$$y = -\frac{3}{32}(1{,}6)^2 + 6 = 5{,}76\ m$$