

Συναρτήσεις

Η υπερβολή και τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Ένα πρόβλημα

Μία τράπεζα ανέθεσε σε μία ομάδα ειδικών υπαλλήλων της να αναμορφώσει τη μηχανογράφηση της σε 12 μήνες. Ύστερα από 9 μήνες αποχώρησαν 4 υπάλληλοι, και έτσι η αναμόρφωση της μηχανογράφησης τελείωσε σε 15 μήνες. Ποιο ήταν το πλήθος των υπαλλήλων της τράπεζας που ανέλαβαν αρχικά την αναμόρφωση της μηχανογράφησης;

Λύση

Μερικές σκέψεις

Τους 9 πρώτους μήνες η μηχανογράφηση προχωρούσε σύμφωνα με χρονοδιάγραμμα. Η αποχώρηση των 4 υπαλλήλων είχε σαν αποτέλεσμα τον διπλασιασμό του χρόνου αποπεράτωσης (από $12-9=3$ μήνες σε $15-9=6$ μήνες).

Τα ποσά πλήθος υπαλλήλων και χρόνος εκτέλεσης είναι **αντιστρόφως ανάλογα**. Συμπεραίνουμε ότι οι υπάλληλοι που συνέχισαν το έργο ήταν οι μισοί από αυτούς που το ξεκίνησαν. Λογικό συμπέρασμα είναι ότι αποχώρησαν οι μισοί υπάλληλοι, που είναι 4.

Άρα είχαν ξεκινήσει το έργο 8 υπάλληλοι, αποχώρησαν οι 4 και το ολοκλήρωσαν οι 4 που απέμειναν.

Λύση με εξίσωση

Έστω y οι υπάλληλοι που ξεκίνησαν το έργο. Μετά τους 9 μήνες αποχώρησαν οι 4 και απέμειναν $x-4$. **Οι ανθρωπομήνες που χρειάζονται για να ολοκληρωθεί το έργο είναι ίδιοι** ανεξάρτητα αν είναι $12-9=3$ ή $15-9=6$.

$$y \cdot 3 = (y - 4) \cdot 6$$

$$3y = 6y - 24$$

$$3y - 6y = -24$$

$$-3y = -24$$

$$y = 8$$

Αρα είχαν ξεκινήσει το έργο 8 υπάλληλοι, αποχώρησαν οι 4 και το ολοκλήρωσαν οι 4 που απέμειναν.

Η συνάρτηση

Έχουμε ήδη ονομάσει y το πλήθος των υπαλλήλων. Έστω x ο χρόνος (μετρημένος σε μήνες).

Η συνάρτηση που περιγράφει τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά /μεγέθη είναι η $y = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$ ή $y \cdot x = a, a \neq 0$.

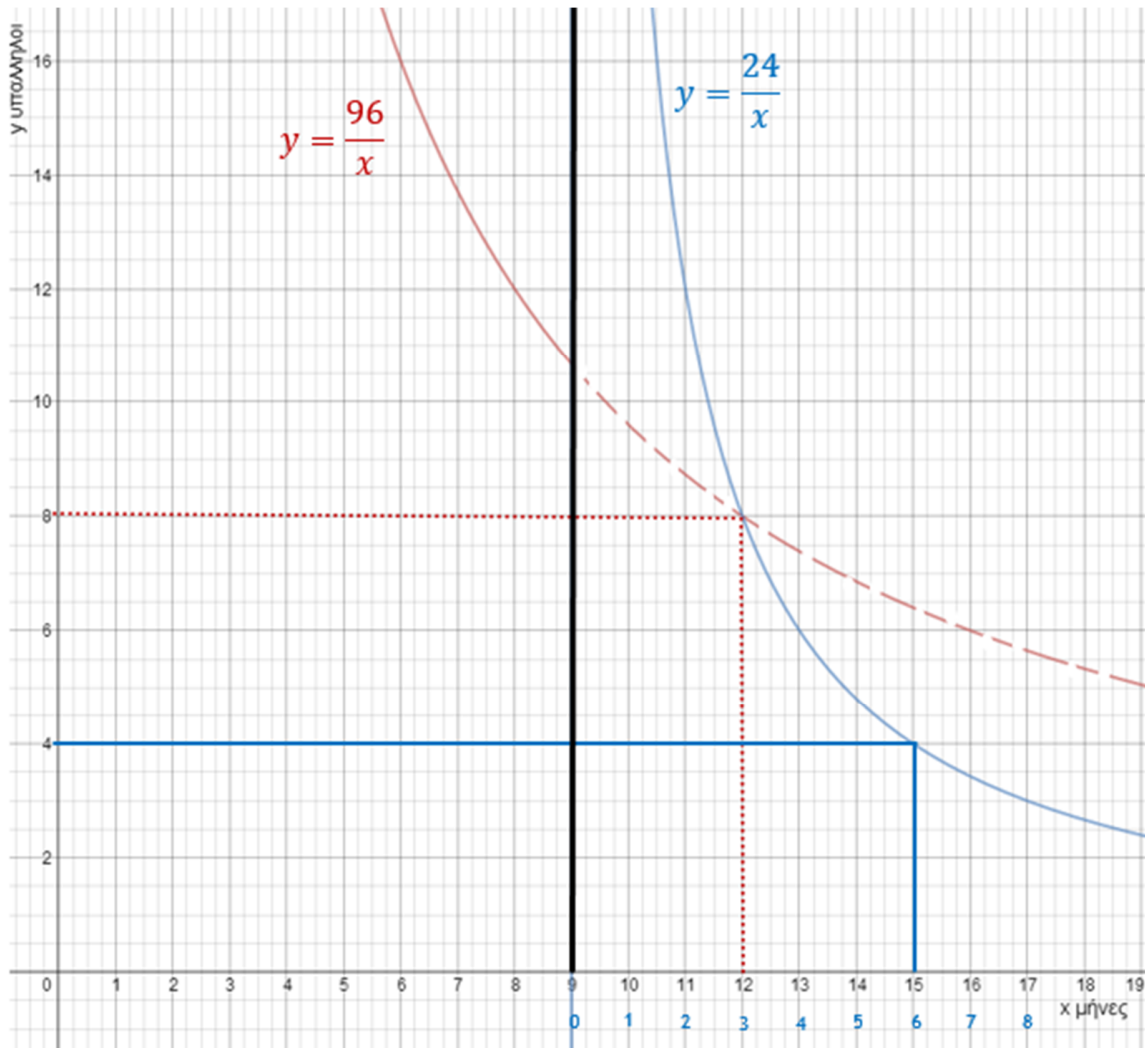
Η σταθερά a εκφράζει το συνολικό «όγκο» του έργου τους ανθρωπομήνες που πρέπει να υλοποιηθούν για να ολοκληρωθεί το έργο. Έχοντας λύσει ήδη το πρόβλημα γνωρίζουμε ότι η σταθερά έχει τιμή $a = 8 \text{ άνθρωποι} \cdot 12 \text{ μήνες} = 96 \text{ ανθρωπομήνες}$.

Έτσι η πρώτη φάση του έργου περιγράφεται από τη συνάρτηση $y = \frac{96}{x}$.

Τα πράγματα αλλάζουν μετά τους 9 μήνες. Ήδη έχουν ολοκληρωθεί $8 \text{ άνθρωποι} \cdot 9 \text{ μήνες} = 72 \text{ ανθρωπομήνες}$ και απομένουν μόνο $96 \text{ ανθρωπομήνες} - 72 \text{ ανθρωπομήνες} = 24 \text{ ανθρωπομήνες}$.

Έτσι η δεύτερη φάση του έργου περιγράφεται από τη συνάρτηση $y = \frac{24}{x}$. Σε αυτήν για $x = 6$ έχουμε $y=4$. Χρειάζονται 4 υπάλληλοι για να ολοκληρώσουν το έργο στους $(15 - 9 =) 6$ μήνες.

Η υπερβολές



Οι πρώτοι 9 μήνες περιγράφονται από τη συνάρτηση $y = \frac{96}{x}$ και το έργο θα μπορούσε να υλοποιηθεί από τα ζεύγη (μήνες, άνθρωποι): (6,16) ή (8,12) ή (12,8) ή (16,6) κλπ.

Μετά τους 9 μήνες η συνάρτηση γίνεται $y = \frac{24}{x}$ και το έργο θα μπορούσε να υλοποιηθεί από τα ζεύγη (μήνες, άνθρωποι): (3,8) ή (6,4) ή (8,3) ή (4,6) κλπ. Προσέξτε την μπλε αριθμηση που ισχύει για τους μήνες της δεύτερης συνάρτησης.