

Τριγωνομετρία

Νόμοι τριγωνομετρίας

Νόμος συνημιτόνων

Να βρείτε τις πλευρές τριγώνου ΑΒΓ, αν τα μήκη τους είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, η γ είναι η μικρότερη πλευρά και Αν σ'ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\sin \Gamma = \frac{3}{4}$

Λύση

Αφού οι πλευρές του τριγώνου είναι φυσικοί αριθμοί και μικρότερη από αυτές είναι η γ τότε οι άλλες πλευρές θα είναι $\gamma+1$ και $\gamma+2$

Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\gamma^2 = (\gamma + 1)^2 + (\gamma + 2)^2 - 2(\gamma + 1)(\gamma + 2)\sin \Gamma$$

Αντικαθιστούμε τη δεδομένη τιμή του συνημιτόνου, απλοποιούμε στο γινόμενο και απαλείφουμε παρονομαστές

$$\gamma^2 = (\gamma + 1)^2 + (\gamma + 2)^2 - 2(\gamma + 1)(\gamma + 2)\frac{3}{4}$$

$$\gamma^2 = (\gamma + 1)^2 + (\gamma + 2)^2 - (\gamma + 1)(\gamma + 2)\frac{3}{2}$$

$$2\gamma^2 = 2(\gamma + 1)^2 + 2(\gamma + 2)^2 - 3(\gamma + 1)(\gamma + 2)$$

Αναπτύσσουμε τις ταυτότητες και κάνουμε επιμεριστική ιδιότητα στο γινόμενο.

$$2\gamma^2 = 2(\gamma^2 + 2\gamma + 1) + 2(\gamma^2 + 4\gamma + 4) - 3(\gamma^2 + 2\gamma + \gamma + 2)$$

$$2\gamma^2 = 2(\gamma^2 + 2\gamma + 1) + 2(\gamma^2 + 4\gamma + 4) - 3(\gamma^2 + 3\gamma + 2)$$

Απαλείφουμε τις παρενθέσεις.

$$2\gamma^2 = 2\gamma^2 + 4\gamma + 2 + 2\gamma^2 + 8\gamma + 8) - 3\gamma^2 - 9\gamma - 6$$

Μηδενίζουμε το δεύτερο μέλος, κάνουμε αναγωγές ομοίων όρων και καταλήγουμε στη εξίσωση:

$$\gamma^2 - 3\gamma - 4 = 0$$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$

Υπολογίζουμε τις πραγματικές λύσεις:

$$\rho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 5}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\rho_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 5}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

Επειδή το γ εκφράζει μήκος πλευράς τριγώνου είναι $\gamma > 0$ άρα $\gamma = 4$, η τιμή $\gamma = -1$ απορρίπτεται. Τα μήκη των πλευρών του τριγώνου είναι $\alpha = 4+2=6$, $\beta = 4+1=5$ και $\gamma = 4$ ή $\alpha=5$, $\beta=6$ και $\gamma=4$.