Εξισώσεις-Ανισώσεις

Εξισώσεις β' βαθμού

Η γενική μορφή και η λύση της

Η γενική μορφή της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με x τον άγνωστο, α τον συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου, β τον συντελεστή του πρωτοβάθμιου όρου και γ τον σταθερό όρο.

Η μέθοδος που θα εφαρμόσουμε είναι γνωστή ως **μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου**.

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

> Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με 4α, όπου α ο συντελεστής του x^2.

$$4\alpha(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 0$$

$$4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + 4\alpha\gamma = 0$$

> Μεταφέρουμε στο β' μέλος το σταθερό όρο.

$$4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x = -4\alpha\gamma$$

> Δημιουργούμε στο α' μέρος τέλειο τετράγωνο προσθέτοντας κατάλληλα και στο β' μέλος.

$$4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma \; '$$

$$(2ax)^2 + 2 \cdot (\alpha x) \cdot \beta + \beta^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

Η παράσταση $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ είναι μια κρίσιμη ποσότητα για τις λύσεις της εξίσωσης. Την ονομάζουμε **Διακρίνουσα.** $\boldsymbol{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma}$.

$$\boldsymbol{(2ax + \beta)^2 = \Delta}$$

Αν $\Delta < 0$ η εξίσωση είναι **αδύνατη**, δεν έχει καμία λύση στους πραγματικούς αριθμούς.

Αν $\Delta = 0$ η εξίσωση έχει **μια διπλή πραγματική ρίζα**.

$$(2\alpha\rho + \beta)^2 = 0$$

$$2\alpha\rho = -\beta$$

$$\boldsymbol{\rho = -\frac{\beta}{2\alpha}}$$

Αν $\Delta > 0$ η εξίσωση **δυο πραγματικές ρίζες**.

$$2\alpha\rho_1 + \beta = \sqrt{\Delta} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\rho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}}$$

και

$$2\alpha\rho_2 + \beta = -\sqrt{\Delta} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\rho_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}}$$

Έτσι το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)}$$

Αν η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης δεν είναι αρνητική μπορούμε να υπολογίζουμε τις ρίζες της από τον τύπο:

$$\boldsymbol{\rho_{1,2} = \frac{-\beta \mp \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\beta \mp \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$$

Ελλιπείς μορφές και η λύση τους

- Για $\alpha = 0$ η $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ γίνεται η πρωτοβάθμια εξίσωση $\beta x + \gamma = 0$

Η ρίζα της είναι $x = -\frac{\gamma}{\beta}$

$$A\nu\ \alpha = 0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \beta x + \gamma = 0\ \acute{\eta}\ x = -\frac{\gamma}{\beta}$$

- Για $\beta = 0$ η $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ γίνεται η δευτεροβάθμια εξίσωση $\alpha x^2 + \gamma = 0$

Αν οι αριθμοί γ και α είναι ομόσημοι τότε η ρίζα της είναι $x = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$

$$A\nu\ \beta = 0\ \kappa\alpha\iota\ \gamma \cdot \alpha > 0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \alpha x^2 + \gamma = 0\ \acute{\eta}\ x = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$$

- Για $\gamma = 0$ η $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ γίνεται η δευτεροβάθμια εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x = 0.$

Τότε $x(\alpha x + \beta) = 0$. Οι ρίζες της είναι $x = 0$ και $x = -\frac{\beta}{\alpha}$

$$A\nu\ \gamma = 0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ x(\alpha x + \beta) = 0\ \acute{\eta}\ x = -\frac{\beta}{\alpha}\ \kappa\alpha\iota\ x = 0$$